

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

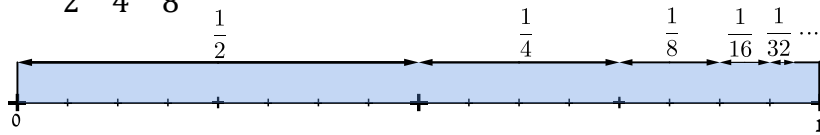
דף עבודה – שאלון 571

לאחר שתתחברו לחשבון GOOL שלכם, צפו בסרטון וענו על השאלות הבאות.



- (1) נתונה סדרה הנדסית, שהאיבר הראשונה בה הוא חיובי ($a_1 > 0$) ושמנתה q .
היעזרו ביישומון והשלימו את הטענות הבאות (קטנים/גדולים/קטן/גדל):
- א. כאשר $q > 1$ ככל שמספר האיברים (n) גדל, איברי הסדרה הולכים ו_____
 - ב. כאשר $0 < q < 1$ ככל שמספר האיברים (n) גדל, איברי הסדרה הולכים ו_____
 - ג. כאשר $q > 1$ ככל שמספר האיברים (n) גדל, סכום הסדרה הולך ו_____
 - ד. כאשר $0 < q < 1$ ככל שמספר האיברים (n) גדל, סכום הסדרה הולך ו_____
 - ה. כאשר $0 < q < 1$ ככל שמספר האיברים (n) גדל, קצב השינוי של סכום איברי הסדרה הולך ו_____

(2) הביטו בציר המספרים ונסו לשער מה סכום הסדרה: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$



תזכורת: סדרה הנדסית אינסופית המקיימת $|q| < 1$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

דוגמאות לסדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות:

$$(1) \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \quad (2) \quad -4, -1, -\frac{1}{4}, \dots \quad (3) \quad 9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \dots$$

נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $S = \frac{a_1}{1-q}$.

באופן כללי, כאשר מנה של סדרה הנדסית מקיימת $-1 < q < 1$, ($q \neq 0$).

אז סכום אינסוף האיברים: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ הוא מספר סופי.

כאשר מחשבים סכום של n איברים בסדרה אינסופית מתכנסת משתמשים בנוסחה: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

(3) נתונה סדרה הנדסית: $3, 1, 1/3, \dots$

- א. חשבו את סכום 5 איברי הסדרה הראשונים.
- ב. חשבו את סכום 10 איברי הסדרה הראשונים.
- ג. חשבו את סכום כל איברי הסדרה.

(4) נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n , מנתה $\frac{1}{4}$, וסכומה הוא $\frac{16}{3}$.

- א. מצאו את האיבר הראשון של הסדרה.
- ב. בין כל שני איברים סמוכים בסדרה A מכניסים איבר נוסף כך שמתקבלת סדרה הנדסית חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא b_n .
- עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא: נכונה\לא נכונה\לא ניתן לדעת. נמקו קביעתכם.
- (1) סכום הסדרה הנתונה שווה לסכום הסדרה החדשה.
- (2) סכום הסדרה החדשה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.
- (3) האיבר החמישי בסדרה החדשה שווה לאיבר השלישי בסדרה הנתונה.

(5) נתון איבר כללי של סדרה: $a_n = \frac{16}{2^n}$.

- א. הוכיחו שהסדרה היא סידרה הנדסית יורדת.
- ב. חשבו את סכום הסדרה.
- ג. מצאו שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש בניהם הוא $\frac{1}{8}$.

(6) a_n הוא איבר כללי בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת A שכל איבריה חיוביים ומנתה q .

מגדירים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה b_n מוגדר באופן הבא: $b_n = (-1)^n \cdot a_n$.
נגדיר: $T = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$.

- א. הוכיחו כי הסדרה B היא הנדסית מתכנסת, ובטאו את מנתה באמצעות q .
- ב. קבעו אלו מהטענות הבאות נכונות, נמקו קביעתכם:

$$T > 0 \quad (1)$$

$$S = -T \quad (2)$$

$$a_{14} = b_{14} \quad (3)$$

נתון: $q = 0.1$ וכן: $a_1 = 10$.

ג. חשבו את היחס $\frac{S}{T}$.

ד. נתון: $R = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots$ חשבו את היחס $\frac{S}{R}$.

(7) נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות:

$$(1) A = a_1, a_2, a_3 \dots a_n \text{ היא סדרה שסכומה } 32 \text{ ומנתה } \frac{1}{4}.$$

$$(2) B = b_1, b_2, b_3 \dots b_n \text{ היא סדרה שסכומה } 8 \text{ ומנתה } -\frac{1}{2}.$$

$$\text{משתי הסדרות בונים סדרה חדשה: } \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n}$$

א. הוכיחו כי הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת ומצאו את מנתה.

ב. חשבו את סכום הסדרה החדשה.

בונים סדרה אינסופית נוספת C שאיבריה מקיימים:

$$c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2, c_3 = a_3 - b_3, \dots$$

ג. האם הסדרה היא סדרה הנדסית?

ד. חשבו את סכום הסדרה האינסופית: $S_c = c_1 + c_2 + c_3 + \dots$

(8) נתונה סדרה הנדסית אינסופית האיבר השני גדול פי 3.375 מהאיבר החמישי.

א. מצאו את היחס בין סכום איברי הסדרה לסכום האברים במקומות הזוגיים

ב. החליפו את הסימנים של האיברים במקומות הזוגיים בסדרה הנתונה כך שהתקבלה

סדרה חדשה. מצאו את היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום איברי הסדרה הנתונה.

(9) שאלות לתרגול נוסף עם תשובות מלאות באתר גול: [שאלה 1](#), [שאלה 2](#), [שאלה 3](#), [שאלה 4](#).



תשובות סופיות

- (1) א. גדלים ב. קטנים ג. גדל ד. גדל ה. קטן.
- (2) הסכום מתכנס ל-1.
- (3) א. 4.4815 ב. 4.4999 ג. 4.5
- (4) א. 4 ב. (1) לא נכון (2) לא נכון (3) נכון.
- (5) א. $a_6 - a_7$ ב. 16 ג. $a_6 - a_7$
- (6) א. $-q$ ב. (1) לא נכון (2) לא נכון (3) נכון ג. $-\frac{11}{9}$ ד. $\frac{11}{100}$
- (7) א. $-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ ג. לא ד. 24.
- (8) א. $2\frac{1}{2}$ ב. $\frac{1}{5}$